Вестник образования и развития науки Российской академии естественных наук, 2019, 23(1): 43–50

DOI 10.26163/GIEF.2019.23.1.007
УДК (330.4:338.121):331.101.264.22

E.M. Ilyin, N.G. Kosolapenko

CONDITIONS OF BALANCED GROWTH FOR MODEL OF ECONOMY WITH SEARCH FRICTION AND VARIABLE NUMBER OF ECONOMICALLY ACTIVE POPULATION

Evgeniy Ilyin – leading researcher, Institute for Regional Economic Studies of Russian Academy of Science, PhD in Physics and Mathematics, St. Petersburg; **e-mail: emil@iresras.ru**.
Nina Kosolapenko – researcher, Institute for Regional Economic Studies of Russian Academy of Science, St. Petersburg; **e-mail: nina_k@iresras.ru**.

We examine the model of the economy with search friction in the labor market and a variable number of economically active population. The main demographic assumption is that the population is believed to be stable, that is, having a constant age structure and a constant population growth rate. Unlike the standard versions of similar models, where vacancies can be created by firms freely and free of charge, the number of vacancies is determined by a given share of fixed capital. The capital is converted into vacancies gradually, according to the stationary Poisson process. The change in the value of capital is described by a standard equation with a neoclassical production function. The conditions for the existence and stability of the equilibrium trajectories of the model are analyzed. It turns out that the equilibrium trajectories of the model are effective in the sense that the average equilibrium wage level established during the negotiation process exceeds the amount of unemployment benefit. We show that, in the framework of the model in question, an increase in the rate of growth of stable population on equilibrium trajectories, other things being equal, leads to an increase in the level of equilibrium unemployment, a decrease in wages and a decrease in the number of vacancies.

Keywords: *mathematical modeling; aggregated models of economic growth; search and matching models; natural unemployment rate; balanced growth trajectories; time lag; asymptotic stability of solutions; employment rate; capital available; dynamics of fixed capital.*

Е.М. Ильин, Н.Г. Косолапенко

УСЛОВИЯ СБАЛАНСИРОВАННОГО РОСТА ДЛЯ МОДЕЛИ ЭКОНОМИКИ С ПОИСКОВЫМИ ТРЕНИЯМИ И ПЕРЕМЕННОЙ ЧИСЛЕННОСТЬЮ ЭКОНОМИЧЕСКИ АКТИВНОГО НАСЕЛЕНИЯ

Евгений Михайлович Ильин – ведущий научный сотрудник ФГБУН «Институт проблем региональной экономики Российской академии наук», кандидат физико-математических наук, г. Санкт-Петербург; **e-mail: emil@iresras.ru**.
Нина Георгиевна Косолапенко – научный сотрудник ФГБУН «Институт проблем региональной экономики Российской академии наук», г. Санкт-Петербург; **e-mail: nina_k@iresras.ru**.

В настоящей работе рассматривается модель экономики с поисковыми трениями на рынке труда и переменной численностью экономически активного населения. Основное демографическое предположение состоит в том, что население предполагается стабильным, то есть имеющим постоянную возрастную структуру и постоянный темп прироста численности. В отличие от стандартных версий подобных моделей, где вакансии могут свободно и бесплатно создаваться фирмами, число вакансий определяется заданной долей основного капитала. Капитал преобразовывается в вакансии по-

степенно, согласно стационарному пуассоновскому процессу. Изменение величины капитала описывается стандартным уравнением с неоклассической производственной функцией. Анализируются условия существования и устойчивости равновесных траекторий модели. Выясняется, что равновесные траектории модели являются эффективными в том смысле, что устанавливаемый в процессе переговоров средний равновесный уровень заработной платы превосходит величину пособия по безработице. Показано, что в рамках рассматриваемой модели увеличение темпа прироста стабильного населения приводит на устойчивых равновесных траекториях, при прочих равных условиях, к увеличению уровня равновесной безработицы, снижению размера заработной платы и уменьшению числа вакансий.

Ключевые слова: *математическое моделирование; агрегированные модели экономического роста; модели поиска и подбора соответствий; естественный уровень безработицы; траектории сбалансированного роста; временной лаг; асимптотическая устойчивость решений; уровень занятости населения; капиталовооруженность; динамика основного капитала.*

Введение. В настоящей работе рассматривается модель экономики с поисковыми трениями на рынке труда и переменной численностью экономически активного населения (далее – ЭАН). Основное демографическое предположение состоит в том, что население предполагается стабильным, то есть имеющим постоянную возрастную структуру и постоянный темп прироста численности. Отсюда следует, что при неизменном уровне экономической активности ЭАН, составляющее группу стабильного населения, меняется за счет демографических факторов с постоянной средней скоростью. Используемая в работе модель рынка труда относится к типу, получившему в литературе название моделей поиска и подбора соответствий или переговорных моделей (см., например, [7; 9; 10]), где для описания процесса трудоустройства используется функция соответствия. Вариант модели с постоянной численностью ЭАН был рассмотрен в [5]. Здесь, в отличие от стандартной версии подобных моделей, где вакансии могут свободно и бесплатно создаваться фирмами, число вакансий определялось некоторой заданной долей основного капитала. Капитал преобразовывался в вакансии постепенно, согласно стационарному пуассоновскому процессу. Изменение величины капитала описывалось стандартным уравнением с неоклассической производственной функцией. Все эти особенности сохраняются и в рассматриваемой модели и, кроме того, предполагается, что ЭАН имеет постоянный темп прироста и неизменную возрастную структуру.

Анализируются условия существования и устойчивости равновесных траекторий модели. Выясняется, что равновесные траектории модели являются эффективными в том смысле, что устанавливаемый в процессе переговоров средний равновесный уровень заработной платы превосходит величину пособия по безработице. Показано, что в рамках рассматриваемой модели увеличение темпа прироста стабильного населения приводит на устойчивых равновесных траекториях, при прочих равных условиях, к увеличению уровня равновесной безработицы, снижению размера заработной платы и уменьшению числа вакансий.

Обозначим численность ЭАН через $H(t)$. ЭАН включает две группы населения: занятых (работающих) и безработных (лица не работающие, ищущие работу и готовые приступить к работе). Численность этих групп обозначим соответственно через $X(t)$ и $Y(t)$, $0 \le X(t) \le H(t)$. $0 \le Y(t) \le H(t)$. Постоянный темп прироста ЭАН μ, совпадает, как уже упоминалось, с темпом прироста исходного стабильного населения, из возрастных групп которого состоит ЭАН. Предполагается, что в зависимости от демографической ситуации численность населения может как расти, так и убывать, то есть темп μ может иметь любой знак или равняться нулю (последнее соответствует стационарному населению). Таким образом, при неизменном уровне экономической активности населения динамика общей численности ЭАН, а также численности занятых и безработных описывается следующими уравнениями

$$X(t)+Y(t)=H(t), \quad \frac{dH(t)}{dt}=\mu\, H(t), \quad \mu=const. \quad (1)$$

В основу моделей поиска и подбора соответствий положено предположение о неоднородности агентов рынка труда, что выражается в одновременном существовании положительных уровней безработицы и вакантных рабочих мест. Предполагается, что численность безработных и число вакансий определяют поток трудоустройств безработных. Контакт безработного и фирмы (вакансии) формализуется как случайная величина, распределенная по показательному закону, плотность которого пропорциональна числу заявленных вакансий (стационарный пуассоновский процесс). Правило заполнения вакансий также моделируется при помощи пуассоновского процесса, плотность которого пропорциональна численности безработных. Поскольку контакт между безработными и вакансиями – случайная величина, он не зависит от других характеристик безработных и вакансий (фирм).

Интенсивность трудоустройств положительно зависит от численности безработных $Y(t)$ и количества вакантных мест $V(t)$, что формализуется неотрицательной функцией подбора соответствий $m(V,Y) \geq 0$. Функция $m(V,Y)$ предполагается непрерывно дифференцируемой по обоим аргументам достаточное число раз. Будем считать функцию соответствия линейно однородной, что, как указано в [2], имеет эмпирическое подтверждение. Кроме того, пусть $m(0,Y)=m(V,0)=0$ и функция соответствия возрастающая и вогнутая.

Рабочие места ликвидируются с экзогенно заданным темпом q, так что qx – средняя интенсивность ликвидации рабочих мест. Для локальных рынков труда вероятность трудоустройства зависит от уровня занятости X/H. Влияние уровня занятости на интенсивность изменения численности занятых будем учитывать с помощью заданной на интервале [0,1] непрерывно дифференцируемой функции $a(X/H)$. В случае больших или достаточно «гибких» рынков труда, можно считать, что влияние уровня занятости незначительно и положить $a(x) \equiv 1$.

Все фирмы несут одинаковые постоянные капитальные издержки по созданию и поддержанию рабочих мест, интенсивность которых равна $\gamma > 0$. На создание вакансий тратится не весь объем основного капитала (инвестиций) W, а лишь некоторая часть βW, $0 < \beta < 1$. Балансовое соотношение $\gamma V = \beta W$ дает возможность определить число вакансий $V = \alpha W$, $\alpha = \beta/\gamma$.

Капитал, направленный на создание рабочих мест, приводит к изменению системы рабочих мест (вакансий) с различной временной задержкой – лагом. Этот процесс можно моделировать стационарным пуассоновским потоком. Интервал времени между последовательными двумя соседними событиями представляет собой случайную величину, распределенную по показательному закону, плотность распределения которой задается при $t \geq 0$ формулой $n(t) = \lambda \exp(-\lambda t)$, $\lambda > 0$. Среднее время между двумя событиями равняется $1/\lambda$, поэтому параметр λ задает интенсивность потока событий, т. е. определяет среднее число событий в единицу времени. Предполагается, что объем капитала, образовавшегося в момент времени τ и потраченных к моменту времени t на создание вакансий, зависит лишь от интервала освоения $\tau - t$. Обозначим через $\alpha W(\tau)$ объем инвестиций, направленных на создание и поддержание рабочих мест в момент времени τ, а через $V(t)$ – число вакансий, созданных к моменту времени t. К моменту времени $t > \tau$ будет создано $n(t-\tau)\alpha W(\tau)$ вакансий. Интегрируя по всем $\tau < t$, получим объем вакансий, образованный за счет инвестирования:

$$V(t) = \alpha\lambda \int_{-\infty}^{t} W(\tau) e^{-\lambda(t-\tau)} d\tau .$$

Дифференцируя это выражение по t, найдем, что $V(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dV(t)}{dt} = \lambda(\alpha W(t) - V(t)) .$$

Величину выпуска будем задавать производственной функцией $f(W, X)$, неоклассического типа, т.е. предполагается, что $f(W, X)$ возрастающая вогнутая положительно линейно однородная функция, удовлетворяющая условиям Инады. Перечисленные свойства предполагают, что каждый фактор необходим для производства: $f(0, X) = f(W,0) = 0$. Изменение величины капитала описывается стандартным уравнением

$$\frac{dW(t)}{dt} = s\,f(W(t), X(t)) - \delta W(t),$$

т.е. определяется разностью величин инвестиций $sf(W,X)$, $0 < s < 1$ (инвестиции мгновенно превращаются в основной кАпитал), и амортизации капитала δW, $0 < \delta < 1$. Норма сбережения s и норма амортизации δ постоянны и задаются экзогенно.

Таким образом, рассматриваемая нами модель формализована в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dX}{dt} = a\left(\frac{X}{H}\right) m(V,Y) - qX, \quad \frac{dV}{dt} = \lambda(\alpha W - V), \\ &\frac{dW}{dt} = s\,f(W,X) - \delta W, \quad \frac{dH}{dt} = \mu H, \quad Y = H - X. \end{aligned}\right\} (2)$$

1. Анализ условий асимптотической устойчивости равновесных траекторий модели

Ведем новые переменные $x(t)=X(t)/H(t)$, $v(t)=V(t)/H(t)$, $w(t)=W(t)/H(t)$. Используя однородность функций $f(W, X)$, $m(V, Y)$ и уравнения (1), сведем систему уравнений (2) к системе трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = a(x)\,m(v,y) - (\mu+q)x, \quad \frac{dv}{dt} = \alpha\lambda\, w - (\lambda+\mu)v, \\ &\frac{dw}{dt} = s\,f(w,x) - (\delta+\mu)w, \quad y = 1 - x. \end{aligned}\right\} .(3)$$

Будем рассматривать невырожденный случай равновесия, т. е. $x^* > 0$. Найдем точки равновесия (x^*,v^*,w^*) системы (3), приравняв нулю правые части уравнений

$$\begin{aligned} &P(x,v) \equiv a(x)\,m(v,y) - (\mu+q)x = 0; \quad Q(v,w) \equiv \alpha\lambda w - (\lambda+\mu)v = 0; \\ &R(x,w) \equiv sf(w,x) - (\delta+\mu)w = 0. \end{aligned} \qquad (4)$$

Очевидно, система (4) может иметь положительные решения, если $\lambda + \mu > 0$, $\delta + \mu > 0$. Определим капиталовооруженность труда $k = w/x = W/X$ и функцию $\varphi(k) \equiv f(k,1)$. Хорошо известно [1], что при сделанных нами предположениях уравнение $s\varphi(k) - \delta k = 0$ имеет единственное решение $k^* > 0$. Подобный способ определения равновесной капиталовооруженности может не оказаться эффективным, т. е. не быть оптимальным относительно какого-либо критерия. Условия выбора s и k, обеспечивающие максимум потребления, дают возможность определить «эффективный» уровень капиталовооруженности. Для этого надо максимизировать по k и s функцию $(1 - s)\ \varphi(k)$ при условии $s\varphi(k) - \delta k = 0$. Оптимальное значение k^* находится как решение уравнения $\partial\varphi(k)/\partial k = \delta$ (уравнение имеет единственное решение). В этом случае норма сбережения будет зависеть от k^*: $s = s(k^*) = k^*\varphi'(k^*)/\varphi(k)$.

Выбрав равновесное значение капиталовооруженности k^*, преобразуем первое уравнение в (4) к виду

$$a(x)m(\rho k^*, \frac{1}{x} - 1) = \mu + q, \quad \rho = \frac{\alpha\lambda}{\lambda+\mu}. \qquad (5)$$

Приведем некоторые достаточные условия разрешимости уравнения (5). Функция $m(\rho k^*, 1/x - 1)$ в левой части (5) при возрастании x от 0 до 1 строго монотонно убывает от ∞ до 0. Наличие решений и их количество зависит от свойств функции $a(x)$ и знака суммы $\mu + q$. Так, если на всем интервале $[0,1]$ $a(x) > 0$ ($a(x) < 0$) и $\mu + q > 0$ ($\mu + q < 0$), то уравнение (5) имеет, по крайней мере, одно решение. Если, кроме того, на всем интервале $[0,1]$ производная $da(x)/dx < 0$ ($da(x)/dx > 0$), то левая часть (5) строго монотонно убывает (возрастает) и решение единственно. Предположим теперь, что функция $a(x)$ меняет знак на интервале $[0,1]$. Пусть $\mu + q > 0$. Если $a(0) > 0$, то существует по крайней мере одно решение. Когда $a(0) < 0$, уравнение (5) разрешимо, если

$$\max_{0\le x\le 1}\left\{a(x)m(\rho k^*, \frac{1}{x} - 1)\right\} \ge \mu + q > 0.$$

Пусть $\mu + q < 0$. При $a(0) < 0$ также есть хотя бы одно решение. В случае $a(0) > 0$ для разрешимости достаточно выполнения неравенства

$$\min_{0\le x\le 1}\left\{a(x)m(\rho k^*, \frac{1}{x} - 1)\right\} \le \mu + q < 0.$$

Полная занятость, $x = 1$, возможна, когда $\mu + q = 0$ (будем считать, что $a(1) \ne 0$).

Предположим, что уравнение (5) разрешимо, тогда точка равновесия (x^*,v^*,w^*)

находится из соотношений

$$a(x^*)m(\rho k^*, \frac{1}{x^*} - 1) = \mu + q, \quad w^* = k^* x^*, \quad v^* = \rho w^* = \rho k^* x^*, \quad \rho = \frac{\alpha\lambda}{\lambda + \mu} \quad (6)$$

Каждая точка равновесия (x^*, v^*, w^*) определяет траекторию сбалансированного роста $(X^*(t), V^*(t), W^*(t))$, на которой все переменные растут с одинаковым постоянным темпом прироста μ:

$$\frac{1}{X^*}\frac{dX^*}{dt} = \frac{1}{V^*}\frac{dV^*}{dt} = \frac{1}{W^*}\frac{dW^*}{dt} = \mu .$$

Ниже значения некоторой функции $z(x,v,w)$ и ее производных, вычисленных в стационарной точке (x^*, v^*, w^*), будем обозначать следующим образом: $z(x^*, v^*, w^*) \equiv z^*$, $z_x(x^*, v^*, w^*) \equiv z_x^*$, $z_v(x^*, v^*, w^*) \equiv z_v^*$, $z_w(x^*, v^*, w^*) \equiv z_w^*$. Так, например, для функции соответствия: $m(v^*, y^*) \equiv m^*$, $m_v(v^*, y^*) \equiv m_v^*$ или для производной функции $f(w, x)$: $f_w(w^*, x^*) \equiv f_w^*$.

Исследование асимптотической устойчивости стационарных точек по первому приближению сводится к анализу собственных чисел матрицы Якоби S^* системы уравнений (3), вычисленной в стационарной точке (x^*, v^*, w^*) (см., например, [1; 8]) .

Выпишем матрицу первого приближения

$$S^* = \begin{pmatrix} P_x^* & P_{v^*}^* & 0 \\ 0 & Q_v^* & Q_w^* \\ R_x^* & 0 & R_w^* \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Используя (6), найдем элементы матрицы (7):

$$\left.\begin{aligned} & P_x^* = (\mu + q)\left[x^* \frac{a_x^*}{a^*} - \frac{m_y^*}{m^*} - v^* \frac{m_v^*}{m^*}\right], \quad P_v^* = (\mu + q)\, x^* \frac{m_v^*}{m^*}, \\ & Q_v^* = -(\lambda + \mu) < 0, \quad Q_w^* = \alpha\lambda > 0, \\ & R_x^* = (\mu + \delta)\, k^* x^* \frac{f_x^*}{f^*} > 0, \quad R_w^* = -(\mu + \delta)\, x^* \frac{f_x^*}{f^*} < 0. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Характеристический полином матрицы S^* представим в виде

$$-(\xi^3 + a_1\xi^2 + a_2\xi + a_3) .$$

Коэффициенты полинома выражаются через элементы матрицы следующим образом

$$a_1 = \lambda + \mu - (P_x^* + R_w^*),\ a_2 = P_x^* R_w^* - (\lambda + \mu)(P_x^* + R_w^*),\ a_3 = (\lambda + \mu)(P_x^* R_w^* - \alpha\lambda P_v^* R_x^*)$$

Для асимптотической устойчивости стационарного состояния необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического полинома имели отрицательные вещественные части. Проверим условия устойчивости с помощью критерия Гурвица. Критерий формулируется в виде системы неравенств [1; 8]:

$$a_1 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 > 0, \quad a_3 > 0 . \qquad (9)$$

Неравенства (9) определяют необходимые и достаточные для устойчивости соотношения скоростей изменения функций $m(v,y)$ и $f(w,x)$ в точках равновесия, интенсивностей демографических изменений μ и преобразования системы рабочих мест q, λ.

Отметим некоторые достаточные условия справедливости (9). Имеем

$$a_3 = (\lambda + \mu) P_x^* R_w^* - \alpha\lambda P_v^* R_x^* = (\delta + \mu)(\lambda + \mu)(\mu + q) x^* \frac{f_x^*}{f^*}\left[\frac{m_y^*}{m^*} - x^* \frac{a_x^*}{a^*}\right]. \quad (10)$$

Преобразуем в (9) среднее неравенство к виду

$$a_1 a_2 - a_3 = -(P_x^* + R_w^*)\left(P_x^* R_w^* + (\lambda + \mu) a_1\right) + \alpha\lambda P_v^* R_x^* . \quad (11)$$

Пусть $\mu + q > 0$, тогда $P_v^* > 0$. Поскольку $P_v^* R_x^* > 0$ и $R_w^* < 0$, то неравенство $a_3 > 0$ может быть верно, только если $P_x^* < 0$. При этом $a_1 > 0$ и (11) выполняются автоматически. Осталось выяснить, когда $a_3 > 0$. Из (10) следует, что знак a_3 определяется знаком произведения

$$(\mu + q)\left[\frac{m_y^*}{m^*} - x^* \frac{a_x^*}{a^*}\right].$$

Таким образом, $a_3 > 0$, если (в терминах эластичности)

$$E_y^*(m) > y^* E^*(a) . \qquad (12)$$

Сопоставляя (12) с достаточными условиями существования стационарных точек, получим, что, если $a(x) > 0$ и $da(x)/dx < 0$ на всем интервале $[0,1]$, то у системы дифференциальных уравнений есть единственное состояние равновесия и оно устойчиво. Отсюда вытекает, в этом случае модель имеет единственную устойчивую траекторию сбалансированного роста $(X^*(t), V^*(t), W^*(t))$. Очевидно, это же верно и при $a(x) \equiv 1$.

Пусть теперь $\mu + q < 0$, тогда $P_v^* < 0$. Для установления факта асимптотической устойчивости состояний равновесия должны проверяться все условия (9).

2. Анализ свойств равновесных траекторий модели

Обсудим соотношение экзогенных параметров λ, δ, q, характеризующих динамику экономической составляющей модели, и демографического параметра μ, задающего темп прироста ЭАН. Напомним, что при депопуляции темп прироста стабильного населения μ отрицателен. Выше мы видели, что существование положений равновесия модели возможно лишь при бо́льшей «гибкости» рынка капитала, по сравнению с темпом демографических изменений. Действительно, система (4) может быть положительно разрешима лишь при условиях $\lambda + \mu > 0$ и $\delta + \mu > 0$. Если эти ограничения выполнены, то наличие решений и их количество зависит от свойств функции $a(x)$ и знака суммы $\mu + q$. В случае больших или достаточно «гибких» рынков труда, когда можно положить $a(x) \equiv 1$, асимптотически устойчивое равновесие существует и единственно тогда и только тогда, когда $\mu + q > 0$. Другими словами, когда численность трудоспособного населения сокращается, для устойчивости рынка труда требуется, чтобы интенсивность выбытия рабочих мест была бы больше, чем темп убыли ЭАН.

Остановимся на особенностях влияния изменений темпа прироста стабильного населения μ. Для определенности будем считать, что темп μ увеличился. Тогда, как хорошо известно (см., например, [7]) значение равновесной капиталовооруженности k^* уменьшится. Пусть $a(x) \equiv 1$. Поскольку аргумент ρk^* стал меньше, то при фиксированном аргументе x значения функции $m(\rho k^*, 1/x - 1)$ тоже стали меньше. Правая часть в уравнении (5) увеличилась, поэтому значение равновесного уровня занятости x^* уменьшилось. Следовательно, как видно из (6), уменьшились и равновесные значения v^*, w^*. Таким образом, увеличение темпа прироста стабильного населения, а в результате и ЭАН, приводит к снижению числа вакансий и росту уровня равновесной безработицы.

Снижение нормы сбережения s приводит, при прочих равных условиях, к тем же результатам, что и увеличение темпа прироста μ.

Обсудим некоторые возможные обобщения модели. Можно рассмотреть влияние изменения процессов естественного воспроизводства и миграции на условия существования устойчивых траекторий сбалансированного роста. Для этого надо проанализировать связь темпа прироста стабильного населения μ с показателями процесса воспроизводства населения. Моделирование влияния изменений показателей рождаемости, смертности и миграции на изменения темпа прироста стабильного населения и его возрастную структуру базируется на анализе свойств дискретно-непрерывной модели изменения возрастной структуры и численности населения, учитывающей миграцию (о моделях популяционной динамики см., например, [3]). Связь между спектральными свойствами дискретной и дискретно-непрерывной моделей движения населения приведена в [3] (без учета миграционных процессов). Учет в моделях миграции населения не меняет характер связи. Это обстоятельство позволяет распространить на дискретно-непрерывную модель результаты работы [4], где для случая дискретной модели анализируется влияние изменений показателей рождаемости, смертности и миграции на изменения темпа прироста и возрастную структуру стабильного населения.

Комбинируя результаты работ [4; 6], в которых анализируются влияния динамики возрастной структуры населения на ряд показателей производства, потребления и занятости, можно рассмотреть задачу о влиянии демографических переменных на характеристики равновесных состояний в более общей постановке, учтя зависимость нормы сбережения s от возрастной структуры населения. Такая постановка позволяет проследить эффекты взаимной компенсации влияния вариации коэффициентов μ и s. Сейчас мы не станем подробно останавливаться на обсуждении этих обобщений, поскольку это предполагается сделать в другой работе.

Для того, чтобы оценить влияние изменения демографических процессов на величину равновесной заработной платы, надо воспроизвести «каноническую» технологию, принятую в равновесных моделях поиска и подбора соответствий. Подробно этот вопрос рассмотрен в [4] и здесь мы приведем лишь результат и необходимые для его формулировки сведения.

Определение размера заработной платы происходит путем переговоров между фирмой-нанимателем и безработным. Каждая из сторон обладает определенным «активом». «Актив» фирмы зависит от дохода в расчете на одного работника $\varphi^* = \varphi(k^*)$, величины заработной платы работника, затрат на создание и поддержание вакансий γ, темпа ликвидации рабочих мест q и вероятности занятия вакансии. «Актив» работника характеризуется величиной заработной платы, размером пособия по безработице e, вероятностью потери работы q и вероятностью трудоустройства.

Заинтересованность сторон в трудоустройстве приводит к взаимовыгодной кооперации, вызывающей возникновение «излишка». Согласие сторон на определенный дележ этого «излишка» и приводит к установлению ставки заработной платы. Согласно принятой технологии заработная плата определяется в результате обобщенного торга по Нэшу (см. [2]). Экономика предполагает возможность свободного входа фирм на рынок. В результате, фирмы будут наращивать количество новых вакансий до тех пор, пока это будет прибыльным. Поэтому в равновесии «ценность» вакансии должна равняться нулю. Приведенные соображения позволяют выразить величину заработной платы U^* как функцию стационарных значений (x^*,v^*,w^*).и параметров задачи.

$$U^* == \eta\left(\frac{(\mu+\delta)k^*}{s} - e + \gamma\left(\omega^* - 1\right)\right) + e, \quad \omega^* \equiv \frac{v^*}{y^*} \quad (13)$$

Параметр η, $0 < \eta < 1$, характеризует переговорную силу работника. Из формулы (13) следует, что при естественном предположении $\varphi^* > e + \gamma$ равновесное значение U^* превосходит размер пособия по безработице e. Итак, возникающие в рассматриваемой модели равновесия действительно реалистичны, поскольку отражают заложенные в модель представления о трудоустройстве и в состоянии обеспечить «эффективную» величину заработной платы.

Предположим, как мы делали выше, что $a(x) \equiv 1$ и темп прироста населения μ увеличился. Тогда произведение $(\mu + \delta)k^*$ уменьшится. Из предыдущего следует, что уменьшится и показатель ω^*. Следовательно, из (13) вытекает, что при прочих равных условиях и росте μ равновесная ставка заработной платы снизится.

Таким образом, в рамках рассматриваемой модели любое изменение процессов естественного воспроизводства и миграции, вызывающее увеличение темпа прироста стабильного населения, приводит, при прочих равных условиях и $a(x) \equiv 1$, к росту уровня равновесной безработицы, снижению размера заработной платы и уменьшению числа вакансий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука. 1967. – 576 с.

2. *Дементьев А.В.* Вклад Даймонда, Мортенсена и Писсаридиса в экономическую науку // Экономический журнал ВШЭ. 2010. № 1. С. 50–67.

3. Динамическая теория биологических популяций / под ред. Р.А. Полуэктова. М.: Наука, 1974. 456 с.

4. *Ильин Е.М., Косолапенко Н.Г.* Моделирование влияния изменений параметров естественного воспроизводства и миграции на темп роста и возрастную структуру стабильного населения // Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии. VII. СПб.: Нестор-История, 2012. С. 78–101.

5. *Ильин Е.М., Косолапенко Н.Г.* Моделирование уровня безработицы в экономике с поисковыми трениями и с постоянной численностью экономически активного населения // Вестник образования и развития науки Российской академии естественных наук. 2018. № 1. С. 30–38.

6. *Ильин Е.М., Косолапенко Н.Г.* Модель влияния динамики возрастной структуры населения на производство, потребление и занятость // Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии. X. СПб.: Нестор-История, 2016. С. 30–48.

7. *Ромер Д.* Высшая макроэкономика.

М.: Издат. дом ВШЭ. 2015. 855 с.

8. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука. 1969. 424 с.

9. *Rogerson R., Shimer R., Wright R.* Search-Theoretic Models of the Labor Market: A Survey // Journal of Economic Literature. 2005. № 43. P. 959–988.

10. *Romer D.* Advanced Macroeconomics. The McGraw-Hill Series in Economics. Fourth Edition. 2010. 716 p.