Вестник образования и развития науки Российской академии естественных наук, 2020, 24(3): 17–30

DOI 10.26163/RAEN.2020.29.24.003
УДК 331.25:330.4

***E.M. Ilyin*, N.G. Kosolapenko**

MODELING PROCESSES OF FORMING PENSION FUND IN ECONOMY WITH VARIABLE POPULATION

Evgeniy Ilyin – leading researcher, Institute for Problems of Regional Economy of Russian Academy of Science, PhD in Physics and Mathematics, St. Petersburg; **e-mail: emil@iresras.ru**.
Nina Kosolapenko – researcher, Institute for Problems of Regional Economy of Russian Academy of Science, St. Petersburg; **e-mail: nina_k@iresras.ru**.

We introduce an aggregated macroeconomic model taking into account the impact of economic factors (level of employment and level of economic activity, number of vacancies, capital-labor ratio) and demographic parameters (growth rate and age structure of the population) on the size of the Pension fund. The model covers various types of pension systems. We consider several versions of the model including the one characterized by the time lag between the investment and jobs creation and the delay in the receipt of insurance premiums in the Pension fund. The conditions of existence and asymptotic stability of equilibrium trajectories, when the number of employees and the size of fixed capital provide positive values of the pension fund are studied for all variants of the model in question. The comparative statics of the base version of the model is analyzed.

Keywords: *pension system; mathematical modeling; aggregated macroeconomic models; balanced growth paths; demographic processes; age structure; stable population; economy of population structure.*

***Е.М. Ильин*, Н.Г. Косолапенко**

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ ПЕНСИОННОГО ФОНДА В ЭКОНОМИКЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ЧИСЛЕННОСТЬЮ НАСЕЛЕНИЯ

Евгений Михайлович Ильин – ведущий научный сотрудник, ФГБУН «Институт проблем региональной экономики Российской академии наук», кандидат физико-математических наук, г. Санкт-Петербург; **e-mail: emil@iresras.ru**.
Нина Георгиевна Косолапенко – научный сотрудник, ФГБУН «Институт проблем региональной экономики Российской академии наук», г. Санкт-Петербург; **e-mail: nina_k@iresras.ru**.

В работе предлагается агрегированная макроэкономическая модель, учитывающая влияние на размеры Пенсионного фонда (ПФ) как экономических факторов (уровень занятости и уровень экономической активности, число вакантных рабочих мест, капиталовооруженность труда), так и демографических параметров (темп роста и возрастная структура населения). Модель охватывает различные виды пенсионных систем. Рассматриваются несколько вариантов модели, в том числе версия с временным лагом между моментами инвестирования и ввода рабочих мест и задержкой поступления страховых взносов в ПФ. Для всех вариантов модели исследованы условия существования и асимптотической устойчивости равновесных траекторий, на которых численности работающих и объемы основного капитала обеспечивают положительные значения величины ПФ. Исследована сравнительная статика базового варианта модели.

Ключевые слова: *пенсионная система; математическое моделирование; агрегированные макроэкономические модели; траектории сбалансированного роста; демографические процессы; возрастная структура; стабильное население; экономика структуры населения.*

Введение

Настоящая работа посвящена моделированию воздействия экономических и демографических процессов на формирование величины Пенсионного фонда (далее – ПФ) в случае населения переменной численности.

Главной социальной задачей пенсионной системы является обеспечение достойного жизненного уровня и качества жизни пенсионеров. Анализ мирового опыта показывает, что современные пенсионные системы сформировались (и продолжают формироваться) в результате пенсионных реформ в последние двадцать пять лет [10]. При разработке систем пенсионного обеспечения использовались две, в известной степени противоположные парадигмы: концепции распределительной и накопительной систем. Оба подхода имеют свои достоинства и недостатки. Распределительные пенсионные системы основываются на текущем финансировании, и их преимущество в том, что они более устойчивы к провалам финансовых рынков и обеспечивают более надежную социальную защиту и более высокий коэффициент замещения (отношение величины пенсии к размеру заработной плате) для низкооплачиваемых работников. Однако в распределительной системе величина ПФ непосредственно зависит от демографических факторов (соотношения численности населения трудоспособных возрастов и пенсионеров) и состояния рынка труда (уровня занятости и заработной платы). Сформировавшиеся к настоящему времени негативные тенденции изменений этих факторах стали подрывать устойчивость распределительных пенсионных систем.

Накопительные пенсионные системы построены на принципе финансирования пенсии самим работником за счет доли заработной платы и инвестиционного дохода. При этом используются частные (и/или государственные) структуры обязательного накопления. Накопительная пенсионная система не зависит от демографических проблем. В то же время накопительным системам присущи значительные риски, поскольку участники системы несут полную ответственность за ее провалы. Как указано в [10], «Накопительная система эффективно не решала одну из главных социальных задач пенсионной системы – обеспечение адекватного жизненного уровня пенсионеров и социальную справедливость».

В результате приобретенного мирового опыта к настоящему времени пенсионные системы в основном представлены типами, промежуточными между чисто накопительным и чисто распределительным. К такому промежуточному типу относится и российская пенсионная система. Трудовая пенсия по старости состоит из двух частей: страховой и накопительной. Финансирование трудовой пенсии осуществляется за счет страховых взносов, вносимых работодателями. Кроме того, работник имеет возможность платить взносы негосударственным пенсионным фондам и затем получать негосударственную пенсию.

Анализу состояния, перспектив развития, а также вариантам реформирования пенсионной системы России посвящен целый ряд исследований (см., например, [6; 7; 8; 9; 17; 18; 23; 24; 25; 26; 29]).

В большинстве упомянутых публикаций подчеркивается, что основная угроза устойчивости пенсионной системы РФ вытекает из неблагоприятных демографических тенденций развития. Старение населения порождает многочисленные экономические и социальные последствия. Снижается предложение труда и увеличивается численность пенсионеров, финансируемых одним работником. Кроме того, в современных условиях происходит значительное изменение финансовых потоков между поколениями. В результате, наблюдающаяся демографическая динамика служит источником рисков для государственных финансов [17].

Отмеченные негативные тенденции ставят под угрозу устойчивое функционирование пенсионной системы России и делают актуальными разработку и анализ макроэкономических моделей функционирования пенсионной системы, учитывающих одновременно и экономический, и демографический контекст.

Предлагаемая в настоящей работе агрегированная макроэкономическая модель учитывает влияние на размеры ПФ как экономических факторов (в т.ч. уровня занятости, числа вакантных рабочих мест и капиталовооруженности труда), так и демографических параметров: темпа роста и возрастной структуры населения. Модель включает различные варианты пенсионных систем.

Дадим краткое описание особенностей модели. Размер страховых взносов в ПФ и величина средней пенсии в модели задаются экзогенно. Потоки средств, поступающих в ПФ, и его расходов на выплаты пенсий определяются численностями, соответственно, занятого населения и пенсионеров, которые являются эндогенными переменными модели. Доля экономически активного населения (далее – ЭАН) может задаваться экзогенно или быть эндогенным параметром модели, зависящим от объема ПФ. Для определения численности работающего населения служит вариант модели рынка труда с поисковыми трениями («переговорная модель рынка труда», использующая функцию соответствия), в которой интенсивность изменения числа занятых рабочих мест определяется величиной функционирующего в экономике капитала и численностью безработных. Темп выбытия рабочих мест считается постоянным. Динамика капитала описывается обычным образом с использованием производственной функции неоклассического типа. В разных модификациях модели величина банковского процента и темп прироста заработной платы могут быть постоянными величинами или определяться эндогенно. В качестве населения модели мы рассматриваем население, характеризующееся неизменным темпом роста (положительным или отрицательным). В одном из вариантов модели предполагается, что основной капитал преобразуется в вакантные рабочие места не мгновенно, а с некоторым временным лагом, и поступление страховых взносов также происходит с задержкой (временным лагом).

Для всех вариантов модели исследованы условия существования и асимптотической устойчивости равновесных траекторий, на которых численности работающих и объемы основного капитала обеспечивают за счет выбора подходящего размера страховых взносов положительные значения величины ПФ. Другими словами, модель позволяет указать такие соотношения демографических и экономических показателей, которые гарантируют устойчивость функционирования пенсионной системы за счет собственных ресурсов и без привлечения трансфертов. Исследована сравнительная статика базового варианта модели.

1. Формулировка модели

Сформулируем базовый вариант модели. Обозначим численность населения через $H(t)$. Динамику численности будем описывать следующим уравнением

$$\frac{dH(t)}{dt} = \mu\, H(t), \qquad \mu = const. \tag{1}$$

Предполагается, что в зависимости от демографической ситуации, темп μ может иметь любой знак (суженный режим воспроизводства населения характеризуется значениями $\mu < 0$) или равняться нулю (последнее соответствует стационарному населению). Численность экономически активного населения (ЭАН) обозначим как $L(t)$. ЭАН включает две группы населения: занятых (работающих) и безработных (лица не работающие, ищущие работу и готовые приступить к работе). Численность этих групп обозначим соответственно через $X(t)$ и $Y(t)$, $0 \le X(t) \le L(t)$. $0 \le Y(t) \le L(t)$. Постоянный темп прироста ЭАН совпадает с темпом прироста μ исходного населения, из возрастных групп которого состоит ЭАН. Будем предполагать, что $L(t) = \alpha H(t)$. Доля ЭАН в общей численности зависит от возрастной структуры населения (в основном от доли лиц трудоспособного возраста в общей численности населения), а также и от экономического контекста, в частности, от достаточности коэффициента замещения. В базовом варианте модели $\alpha = const$, $0 < \alpha < 1$. Обозначим численность лиц, получающих выплаты из ПФ, через $N(t)$, и пусть $N(t) = \beta H(t)$, где $\beta = const$, $0 < \beta < 1$. Темп прироста группы пенсионеров $N(t)$ также равняется μ.

Размер средней заработной платы обозначим через $W(t)$ и будем исчислять величины страховых выплат (на одного работника) и средней пенсии в долях $W(t)$. Величина среднего взноса работника в ПФ равна aW, $a = const$, $0 < a < 1$. Чтобы модель включала различные варианты пенсионных систем, предполагаем, что ставка пенсионного сбора состоит из двух частей: $a = a1 + a2$, где $a1$ – доля заработной платы, вносимой в ПФ самим работником, $a2$ – платеж, перечисляемый в ПФ работодателем (обязательный и дополнительный) и равный доле заработной платы работника. Обычно обязательная часть выплат в ПФ рассчитывается как одинаковая для всех возрастных групп часть заработка. Величину выплачиваемой из ПФ средней пенсии обозначим через bW, $b = const$, $0 < b < 1$, (параметр b обычно называют коэффициентом замещения).

Интенсивность изменения величины ПФ $B(t)$ будем задавать соотношением (ср. [27]):

$$\frac{dB(t)}{dt} = r(t)B(t) + aW(t)X(t) - bW(t)N(t).$$

Здесь $r(t)$ – величина банковского процента. Перейдём в этом уравнении от номинальных величин к реальным, т.е. введем переменную $Z(t) \equiv B(t)/W(t)$ и пусть $\lambda(t) = (dW(t)/dt)/W(t)$ – темп прироста заработной платы. В результате уравнение динамики ПФ примет вид

$$\frac{dZ(t)}{dt} = (r(t) - \lambda(t))Z(t) + aX(t) - bN(t). \qquad (2)$$

Для описания динамики занятого населения используем вариант модели рынка труда с поисковыми трениями (модели этого типа называют также моделями поиска и подбора соответствий, или переговорными моделями). Подробнее с моделями рынков с поисковыми трениями можно ознакомиться в [11; 19; 21; 22; 31; 32]. Кратко приведем необходимые нам сведения.

В основу моделей поиска и подбора соответствий положено предположение о неоднородности агентов рынка труда, что выражается в одновременном существовании положительных уровней безработицы и вакантных рабочих мест. Предполагается, что численность безработных и число вакансий определяют поток трудоустройств безработных. Контакт безработного и фирмы (вакансии) формализуется как случайная величина, распределенная по показательному закону, плотность которого пропорциональна числу заявленных вакансий (стационарный пуассоновский процесс). Правило заполнения вакансий также моделируется при помощи пуассоновского процесса, плотность которого пропорциональна численности безработных. Поскольку контакт между безработными и вакансиями – случайная величина, он не зависит от других характеристик безработных и вакансий (фирм).

Интенсивность трудоустройств положительно зависит от численности безработных $Y(t)$ и количества вакантных мест $V(t)$, что формализуется неотрицательной функцией подбора соответствий $m(V(t), Y(t)) \geq 0$. Функция $m(V(t), Y(t))$ предполагается непрерывно дифференцируемой по обоим аргументам достаточное число раз. Будем считать функцию соответствия линейно однородной, что, как указано в [11], имеет эмпирическое подтверждение. Кроме того, пусть $m(0, Y(t)) = m(X(t), 0) = 0$ и функция соответствия возрастающая и вогнутая.

Рабочие места ликвидируются с экзогенно заданным темпом $q = const$, $0 < q < 1$, так что $qX(t)$ – средняя интенсивность ликвидации рабочих мест.

Уравнение, описывающее динамику численности занятого населения, имеет вид

$$\frac{dX(t)}{dt} = m(V(t), Y(t)) - qX(t). \qquad (3)$$

В настоящей работе, в отличие от стандартной версии подобных моделей, где вакансии могут свободно и бесплатно создаваться фирмами, число вакансий определяется некоторой заданной долей величины основного капитала $K(t)$, т.е. $V(t) = \gamma K(t)$, $\gamma = const$, $0 < \gamma < 1$.

Величину выпуска будем задавать производственной функцией $f(K(t), X(t))$, неоклассического типа, т.е. предполагается, что $f(K(t), X(t))$ возрастающая вогнутая положительно линейно однородная функция, удовлетворяющая условиям Инады.

Перечисленные свойства предполагают, что каждый фактор необходим для производства: $f(0, X(t)) = f(K(t), 0) = 0$. Изменение величины капитала описывается стандартным уравнением (см., например, [2; 4; 16]).

$$\frac{dK(t)}{dt} = sf(K(t), X(t)) - \delta K(t)\,. \tag{4}$$

т.е. определяется разностью величин инвестиций $sf(K(t), X(t))$, $0 < s < 1$ (инвестиции мгновенно превращаются в основной капитал), и амортизации капитала δK, $0 < \delta < 1$. Норма сбережения s и норма амортизации δ постоянны и задаются экзогенно.

Таким образом, рассматриваемая нами модель динамики объема ПФ представлена в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1) – (4).

Используя свойство однородности уравнений (3), (4), удобно перейти к относительным переменным, т.е. рассматривать все переменные модели в расчете на одного человека. Это позволит нам понизить за счет уравнения (1) порядок системы дифференциальных уравнений. Определим переменные

$$z(t) \equiv \frac{Z(t)}{H(t)}, \quad x(t) \equiv \frac{X(t)}{H(t)}, \quad k(t) \equiv \frac{K(t)}{H(t)}. \tag{5}$$

Теперь базовый вариант нашей модели формализован в виде системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz(t)}{dt} = (r(t) - \lambda(t) - \mu)z(t) + ax(t) - \beta b; \quad \frac{dx(t)}{dt} = m(\gamma k(t), \alpha - x(t)) - (q+\mu)x(t); \\ &\frac{dk(t)}{dt} = sf(k(t), x(t)) - (\delta + \mu)k(t). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

2. Анализ условий существования и асимптотической устойчивости стационарных состояний системы уравнений (6)

В данном разделе выясняются условия существования равновесных состояний (стационарных точек) и их асимптотической устойчивости для базового варианта модели. Всюду ниже нас будут интересовать положительные значения переменных (5): $0 < x(t) < \alpha$, $k(t) > 0$, $z(t) > 0$. Чтобы найти стационарные состояния системы уравнений (6) приравняем нулю правые части. Получим, что стационарные точки (z^*, x^*, k^*) находятся как решения системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} &(r(t) - \lambda(t) - \mu)z(t) + ax(t) - \beta b = 0; \quad m(\gamma k(t), \alpha - x(t)) - (q+\mu)x(t) = 0; \\ &sf(k(t), x(t)) - (\delta + \mu)k(t) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Очевидно, система (7) может иметь ненулевые решения, если $q + \mu > 0$, $\delta + \mu > 0$. Следует заметить, что эти неравенства формализуют реальные ограничения лишь для режима суженного воспроизводства населения, когда $\mu < 0$. Будем сейчас считать, что $r = const$ и $\lambda = const$. Определим капиталовооруженность $\kappa(t) \equiv k(t)/x(t) = K(t)/X(t)$ и функцию $\varphi(\kappa) \equiv f(\kappa, 1)$. Хорошо известно (см., например, [2; 4; 16]), что при сделанных нами предположениях уравнение $s\varphi(\kappa) - \delta\kappa = 0$ имеет единственное решение $\kappa^* > 0$. Определив из этого уравнения равновесное значение капиталовооруженности κ^*, преобразуем второе уравнение в (7) к виду

$$m(\gamma\kappa^*, \frac{\alpha}{x} - 1) = \mu + q\,. \tag{8}$$

Функция $m(\gamma\kappa^*, \alpha/x - 1)$ в левой части (8) при возрастании x от 0 доα строго монотонно убывает от ∞ до 0. Поэтому при $q + \mu > 0$ уравнение (8) имеет единственное решение $0 < x^* < 0$. Отсюда найдем стационарное значение капитала $k^* = \kappa^* x^*$.

Равновесные значения величины ПФ z^* определим из первого уравнения (7).

Условие 1. Здесь и всюду ниже будем предполагать, что величина поступлений в ПФ превосходит его расходы, т.е. всегда удается выбрать такие значения равновесной уровня занятости x^* и такие значения параметров модели, что выполняется неравенство $x^* > \beta b/a$.

Отсюда вытекает, что для существования положительной стационарной величины ПФ необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$r - \lambda - \mu < 0\,. \tag{9}$$

Теперь

$$z^* = \frac{\beta b - ax^*}{r - \lambda - \mu} > 0\,. \tag{10}$$

Таким образом, при выполнении *Условия 1* и неравенства (9) у системы дифференциальных уравнений (6) существует единственное положение равновесия (z^*, x^*, k^*), удовлетворяющее принятым ограничениям: $\beta b/a < x^* < \alpha$, $k^* > 0$, $z^* > 0$.

Свойство асимптотической устойчивости этого равновесного состояния проверяется в *Приложении*, где показано, что приведенные нами естественные условия существования положения равновесия обеспечивают и его асимптотическую устойчивость. Тип состояния равновесия – узел, т.е. осцилляций в процессе установления не будет, а траектории стремятся к стационарному состоянию по определенному направлению.

Расширим данную версию модели, предположив, что коэффициент замещения β пропорционален размеру ПФ $z(t)$, т. е $\beta = \chi z(t),\ 0 < \chi < 1$. Теперь равновесное значение объема ПФ $z^* = -(a/l)\ x^* > 0$, если параметры модели обеспечивают неравенство $l = (r - \lambda - \mu - \chi b) < 0$, а для асимптотической устойчивости положения равновесия модели достаточно справедливости этого неравенства.

Точка равновесия (z^*, x^*, k^*) определяет, согласно формулам (5), траекторию сбалансированного роста переменных $Z(t), X(t), K(t))$, на которой эти переменные растут с одинаковым постоянным темпом прироста μ:

$$\frac{1}{Z(t)}\frac{dZ(t)}{dt} = \frac{1}{X(t)}\frac{dX(t)}{dt} = \frac{1}{K(t)}\frac{dK(t)}{dt} = \mu .$$

Всюду ниже значения некоторой функции $g(z, x, k)$ и ее производных, вычисленных в стационарной точке (z^*, x^*, k^*), будем обозначать следующим образом: $g(z^*, x^*, k^*) \equiv g^*$, $g_x(z^*, x^*, k^*) \equiv g_x^*$, $g_z(z^*, x^*, k^*) \equiv g_z^*$, $g_k(z^*, x^*, k^*) \equiv g_k^*$. Так, например, для функции соответствия: $m(v^*, y^*) \equiv m^*$, $m_v(v^*, y^*) \equiv m_v^*$ или для производной функции $f(k,\ x)$: $f_k(k^*, x^*) \equiv f_k^*$.

Обратимся к рассмотрению сравнительной статики модели. Выясним, в каком направлении будут изменяться равновесные значения переменных z^*, x^*, k^* при изменениях параметров модели α, γ и μ. Начнем с выяснения характера влияния темпа роста населения μ. Хорошо известно (см., например, [2; 4; 16]), что с увеличением темпа роста рабочей силы значения капиталовооруженности уменьшаются, т.е. $\partial\kappa/\partial\mu < 0$. Продифференцируем по μ уравнение (8). В стационарной точке выполняется соотношение

$$\gamma m_v^* \frac{\partial\kappa^*}{\partial\mu} - 1 = \frac{\alpha}{(x^*)^2}\ m_y^* \frac{\partial x^*}{\partial\mu}\ ,$$

из которого, с учетом $\partial\kappa^*/\partial\mu < 0$, вытекает, что $\partial x^*/\partial\mu < 0$. Другими словами, увеличение темпа роста населения μ приводит к снижению равновесного уровня занятости.

Продифференцируем по μ третье уравнение (7). В стационарной точке:

$$s\left[f_k^* - \frac{f^*}{k^*}\right]\frac{\partial k^*}{\partial\mu} = k^* - s\,f_x^*\ \frac{\partial x^*}{\partial\mu}\ .$$

Поскольку $\partial x^*/\partial\mu < 0$ и производственная функция вогнута, из формулы следует, что $\partial k^*/\partial\mu < 0$, т.е. равновесное удельное значение капитала убывает с ростом μ.

Продифференцируем по μ первое уравнение (7). Учитывая неравенства $\partial x^*/\partial\mu < 0$ и (9), выясним, что и равновесное удельное значение размера ПФ убывает с ростом μ: $\partial z^*/\partial\mu < 0$.

Подведем итог: увеличение темпа роста населения μ негативно влияет на равновесные значения удельных переменных, снижая их значения.

Равновесные значения производных $\partial x^*/\partial\gamma$ и $\partial k^*/\partial\gamma$ имеют одинаковые знаки ито же верно для производных $\partial x^*/\partial\alpha$ и $\partial k^*/\partial\alpha$. Действительно, это вытекает из независимости равновесной капиталовооруженности κ^* от этих параметров.

Дифференцируя уравнение (8) по параметрам α и γ, действуя, как и выше, можно показать, что $\partial x^*/\partial\alpha > 0$ и $\partial x^*/\partial\gamma > 0$, а, следовательно, и $\partial k^*/\partial\alpha > 0$ и $\partial k^*/\partial\gamma > 0$.

Принимая во внимание тенденции изменений x^*, при помощи уравнения, определяющего z^* и неравенства (9), получим: $\partial z^*/\partial\alpha > 0$ и $\partial z^*/\partial\gamma > 0$.

Таким образом, увеличение уровня экономической активности и доли капитала, расходуемого на создание рабочих мест, приводит к росту равновесного уровня занятости и, как следствие, к росту равновесного объема ПФ.

Мы видим, что рост коэффициентов α, γ, μ влияет на стационарные значения переменных разнонаправлено, что может, в частности, уменьшить их значения. Используя формулы, полученные при анализе сравнительной статики, можно выяснить каким соотношениям должны удовлетворять z^*, x^*, k^* и коэффициенты модели, чтобы за счет согласования тенденций изменения этих коэффициентов не допустить уменьшения стационарных значений, но здесь мы на этом останавливаться не будем.

В связи с приведенными результатами сравнительной статики естественно возникает интересный и практически важный вопрос об учете влияния изменений показателей естественного воспроизводства (рождаемость, смертность) и миграции на уровень занятости населения и объем ПФ. В рассматриваемой модели такое влияние может быть прослежено через параметры α, β, s и μ, имеющие очевидную зависимость от демографических процессов. Обсудим кратко один из возможных путей решения этого вопроса.

Работа [15] посвящена моделированию влияний изменений показателей естественного воспроизводства и миграции населения на размер ПФ. Примененный подход базируется на результатах по сравнительной статике дискретной модели движения населения, учитывающей процессы рождаемости, смертности и миграции [13]. Данная демографическая модель обладает свойством эргодичности, обеспечивающим за счет асимптотической устойчивости стабилизацию динамики населения. Напомним, что стабильное население имеет постоянный темп роста и неизменную во времени возрастную структуру, которые задаются соответственно ведущим собственным числом (Перронов корень, простое вещественное собственное число с максимальной вещественной частью в спектре матрицы динамики.) и отвечающим ему неотрицательным собственным вектором матрицы динамики. В [13; 15] получены, в частности, формулы, связывающие изменения темпа роста стабильного населения и его возрастной структуры с изменениями возрастных коэффициентов рождаемости, смертности (в модели удобнее использовать дополняющий показатель – вероятность дожития до начального возраста следующей возрастной группы) и миграции. Эти формулы позволяют получить и проанализировать аналитические выражения, описывающие изменения величины поступлений и объема расходов ПФ при изменениях коэффициентов рождаемости, миграции и вероятностей дожития.

Обсудим применимость подобного подхода в условиях нашей модели. Поскольку в нашей модели время меняется непрерывно, используем для описания динамики населения так называемую дискретно-непрерывную модель [12].

Обозначим через $n(t)$ вектор-столбец, компоненты которого представляют собой численности отдельных возрастных групп:

$$n(t) = (n_0(t), n_1(t),.., n_{\omega-1}(t), n_\omega(t)),$$

где $n_i(t)$ – численность i-й возрастной группы в момент времени t, ω – номер последней возрастной группы. Всюду ниже для упрощения принято, что возраст населения меняется с одинаковым постоянным интервалом, равным 1 году. Введем не зависящие от времени векторы возрастных коэффициентов рождаемости $\Phi = (\Phi_0, \Phi_1,\ldots, \Phi_\omega)$ (очевидно, что коэффициенты отличны от нуля лишь в группах репродуктивного периода), вероятностей дожития $P = (P_0, P_1,\ldots, P_{\omega-1})$ и коэффициентов миграции $r = (r_0, r_1, r_2,\ldots, r_\omega)$. Динамика возрастного состава изображается следующей линейной системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dn(t)}{dt} = Ld(t)n(t), \quad Ld(t) = (L + R - I), \quad R = rI,$$

где L – стандартная матрица Лесли, описывающая влияние процессов рождаемости и смертности на население. Элементами матрицы L служат компоненты векторов Φ и P.

Обозначим собственные числа матрицы Ld через θ_i, а отвечающие им собственные векторы через w_i, $i = 0,1,\ldots,\omega$. Решение системы уравнений представимо в виде

$$n(t) = c_0 w_0 \exp(\theta_0 t) + \sum_{i=1}^{\omega} c_i w_i \exp(\theta_i t).$$

Будем считать, что в спектре матрицы Ld есть ведущее собственно число, которое мы обозначим как θ_0, тогда система обладает свойством эргодичности. Если все элементы матрицы неотрицательны, то наличие ведущего собственного числа гарантируется теорией неотрицательных матриц [2]. На практике коэффициенты миграции часто бывают отрицательными, но мы будем считать, что и в этом случае характер спектра сохранится. Значительное количество численных расчетов динамики, выполненных авторами, подтверждают обоснованность этого предположения. В силу эргодичности асимптотическое решение при $t \to \infty$ имеет вид

$$n(t) \approx c_0 w_0 \exp(\theta_0 t) .$$

Отсюда непосредственно вытекает, что и в данном случае темп роста стабильного населения модели, возрастная структура которого задается собственным вектором w_0, равен ведущему собственному числу θ_0. Обе эти величины представляют собой функции от коэффициентов рождаемости, миграции и вероятностей дожития.

Осталось перенести результаты по сравнительной статике дискретной модели на дискретно-непрерывную модель. Чтобы это сделать, достаточно выяснить связь между спектрами матрицы Ld и матрицы дискретной модели $Lm = L + R$. Очевидно, ведущее собственное число дискретной модели θ1 связано с ведущим собственным числом дискретно-непрерывной модели θ_0 равенством $\theta 1 = 1 + \theta_0$, а отвечающие им собственные векторы соотношением $w(\theta_0) = w1(1 + \theta_0)$. В [13; 15] приведены формулы, выражающие собственное число θ1 и компоненты вектора $w1$ через вероятности дожития и коэффициенты рождаемости и миграции. Итак, мы показали, каким образом можно выяснить влияние изменений параметров воспроизводства на изменения стабильного населения в рамках дискретно-непрерывной модели.

Вернемся к рассматриваемой модели ПФ. Изложенный выше подход позволяет проследить влияние изменений параметров воспроизводства на изменение уровня занятости и объема ПФ. Функция $n(t)$ удовлетворяет уравнению (1) не точно, а лишь асимптотически. Тем не менее, при изучении вопросов сравнительной статики равновесных состояний мы с достаточным основанием можем принять $H(t) = n(t)$ и $\mu = \theta_0$, а параметры модели α, β и s считать зависящими от возрастной структуры стабильного населения дискретно-непрерывной демографической модели.

Подробнее затронутая сейчас тема будет развита в другом месте, а сейчас обсудим лишь один из частных случаев, а именно – влияние вариации рождаемости.

В [13; 15] показано, что при изменениях только коэффициентов рождаемости (показатели смертности и миграции при этом остаются неизменными) перестройка возрастной структуры стабильного населения обусловливается исключительно изменениями темпа роста μ. При этом увеличение рождаемости приводит к росту μ и доли трудоспособных возрастов, а также и к снижению удельного веса лиц пенсионного возраста. Благодаря этому обстоятельству мы имеем основание считать, что $\alpha = \alpha(\mu)$ и $\beta = \beta(\mu)$ (функции $\alpha(\mu)$ и $\beta(\mu)$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми) и $\partial\alpha(\mu)/\partial\mu > 0$, $\partial\beta(\mu)/\partial\mu < 0$. Достаточно интенсивное преобразование возрастной структуры в состоянии обеспечить рост равновесного уровня занятости и равновесного удельного объема ПФ. Действительно, повторяя предыдущие рассуждения для нашего случая, найдем, что $\partial x^*/\partial\mu > 0$ и $\partial z^*/\partial\mu > 0$, если, соответственно, выполнены неравенства

$$\frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} > \frac{x^*}{m_y^*}\left(1 - \gamma m_v^* \frac{\partial\kappa^*}{\partial\mu}\right), \quad \frac{d\beta(\mu)}{d\mu} < \frac{1}{b}\left(a\frac{\partial x^*}{\partial\mu} - z^*\right).$$

Снижение рождаемости вызывает, естественно, противоположный эффект.

В заключение сделаем одно замечание. Можно отказаться от *Условия 1* и неравенства (9), заменив последнее неравенство на противоположное:$(r - \lambda - \mu) > 0$. В силу (10) существует положительное равновесное значение величины ПФ: $z^* > 0$. Однако полученное таким образом стационарное состояние системы (6) оказывается неустойчивым. Соотношение $(r - \lambda - \mu) > 0$ может возникнуть в условиях режима суженного воспроизводства населения (в этом случае $\mu < 0$) и низкого темпа прироста заработной платы.

3. Некоторые обобщения модели

В этом разделе мы рассмотрим некоторые возможные обобщения базового варианта модели.

3.1. Снижение размера ПФ в расчете на одного человека ведет, как уже обсуждалось выше, к угрозе нарушения устойчивости пенсионной системы. Одним из общепринятых действенных способов борьбы с этим явлением служит увеличение экономической активности населения, благодаря повышению возраста выхода на пенсию. При этом коэффициент замещения может мало измениться или остаться постоянным. Учтем влияние удельной величины ПФ с помощью введения в модель функции, задающей долю ЭАН: $0 < \alpha = \alpha(z) < 1$, $\alpha_z < 0$, $0 < z < \infty$. При этом коэффициент замещения β оставим постоянным. По-прежнему считаем выполненным неравенство (9).

Выясним условия существования состояний равновесия. Перепишем первое уравнение (7) в виде

$$z = \rho - \sigma x,\ \sigma = \frac{a}{r - \lambda - \mu} < 0,\ \rho = \frac{\beta b}{r - \lambda - \mu} < 0\,. \quad (11)$$

Подставив это выражение во второе уравнение (7), получим для определения x^* уравнение

$$m(\gamma\kappa^*, \frac{\alpha(\rho - \sigma x)}{x} - 1) = q + \mu\,. \quad (12)$$

Напомним, что благодаря *Условию 1* надо найти $x^* > \rho/\sigma = \beta b/a$. Функция соответствия $m(v, x)$ определена только для неотрицательных значений аргументов, откуда должно быть: $x \le \alpha(\rho - \sigma x) < 1$. Функция $\alpha(x)$ монотонно убывает, поэтому требуется, чтобы $\alpha(0) > \beta b/a$. Очевидно, что на отрезке $\beta b/a < x < x^0 < 1$ функции $\alpha(x)$ с нужными свойствами существуют (например, $\alpha(x) = A/(x+1)$, $A > 0$). Таким образом, если при изменении x в интервале $(\beta b/a, x^0)$ число $q + \mu$ принадлежит области значений функции, стоящей в левой части (12), равновесное значение x^* существует. Поскольку упомянутая функция монотонно убывает, то равновесное значение единственно. Далее, положим $z^* = \rho - \sigma x^*$.

В *Приложении* выяснено, что найденное состояние равновесия (z^*, x^*, k^*) асимптотически устойчиво.

3.2. Рассмотрим вариант модели, в котором удельный объем ПФ непосредственно влияет на интенсивность трудоустройства работников. Подобный механизм может возникнуть при увеличении страховых сборов в ПФ, вызвавших снижение заработной платы, что, в свою очередь, вызовет рост срока поиска работы.

Добавим в правую часть уравнений (3) слагаемое $-\xi Z(t)$, $\xi > 0, \xi = const$. Теперь второе уравнение в (6) примет вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = m(\gamma k(t), \alpha - x(t)) - (q + \mu)x(t) - \xi z(t)\,.$$

Имея в виду (11), вопрос существования равновесного уровня занятости можно свести к решению уравнения

$$m(\gamma\kappa^*, \frac{\alpha}{x} - 1) = \frac{\rho\xi}{x} + q + \mu - \sigma\xi\,. \quad (13)$$

Функция в правой части (13) обращается в нуль при $x_0 = -\rho\xi / (q + \mu - \sigma\xi)$ и положительна при $x > x_0$. Причем $0 < x_0 < \beta b/a$. Функция $m(\gamma\kappa^*, \alpha/x - 1)$ в левой части (13) на отрезке $x_0 < x < \alpha$ строго монотонно убывает от положительного значения до 0. Таким образом, на этом отрезке существует единственное решение уравнения (13), которое будет определять равновесное состояние модели (z^*, x^*, k^*), если параметры обеспечат выполнение *Условия 1*: $x^* > \beta b/a$. Состояние равновесия асимптотически устойчиво (см. *Приложение*).

3.3. Модель с эндогенными параметрами $r(k(t), x(t))$ и $\lambda(k(t), x(t))$. Положим $r(t) = r(k(t), x(t))$, например, допустим, что банковский процент равен предельной производительности капитала $r(t) = f_k(k(t), x(t)) - \delta$ и, кроме того, пусть $\lambda(t) = \varepsilon\,(V(t)/Y(t) - 1) = \varepsilon\,[\gamma k(t)/(\alpha - x(t)) - 1]$, $\varepsilon = const$, $\varepsilon > 0$. Для аппроксимации $\lambda(t)$ используется подход Липси, примененный при исследовании вопросов, связанных с тематикой кривой Филлипса [3, гл. 10]. Согласно приведенной формуле изменение заработной платы пропорционально напряженности рынка труда, показывающей степень расхождения между спросом на труд, который может быть оценен числом вакантных рабочих мест, и предложением рабочей силы.

Первое уравнение в (6) преобразуется в уравнение

$$\frac{dz(t)}{dt} = \left(r(k(t), x(t)) - \varepsilon \left(\frac{\gamma k(t)}{\alpha - x(t)} - 1 \right) - \mu \right) z(t) + a x(t) - \beta b\,.$$

Рассуждая, как и в основном варианте модели, увидим, что стационарное значение $z^* > 0$ будет существовать, если параметры модели обеспечат неравенство

$$r\left(k^*, x^*\right) - \varepsilon\left(\frac{\gamma k^*}{\alpha - x^*} - 1\right) - \mu < 0 \cdot$$

В *Приложении* показано, что в этом случае стационарное состояние – устойчивый узел.

3.4. Очевидно, что не представляет труда сформулировать версию модели, одновременно включающую в себя все исследованные по отдельности обобщения модели. Схема рассуждений останется той же. Однако при этом не удается найти сколь-нибудь простых условий, обеспечивающих существование решений системы (7) и выполнение критерия устойчивости Гурвица.

4. Модель, учитывающая временные лаги

В настоящем разделе мы обобщим базовый вариант модели за счет введения в него временных лагов. Будем считать, что страховые взносы поступают в ПФ не одновременно, а постепенно, с некоторым запаздыванием и, кроме того, инвестиции преобразуются в вакансии также постепенно. Оба эти явления запаздывания удобно представлять стационарным пуассоновским процессом. Подобный подход, применительно к модели рынка с поисковыми трениями и переменной численностью ЭАН, был использован в [14]. Ниже мы воспользуемся некоторыми результатами этой работы.

Опишем способ учета лагов на примере создания рабочих мест. Инвестиции преобразуются в вакансии с различной временной задержкой – лагом. Этот процесс можно моделировать стационарным пуассоновским потоком. Интервал времени между последовательными двумя соседними событиями представляет собой случайную величину, распределенную по показательному закону, плотность распределения которой задается при $t \geq 0$ формулой $g(t) = \tau \exp(-\tau t)$, $\tau > 0$. Среднее время между двумя событиями равняется $1/\tau$, поэтому параметр τ задает интенсивность потока событий, т.е. определяет среднее число событий в единицу времени. Объем инвестиций, образовавшихся в момент времени t_0 и потраченных к моменту времени t на создание вакансий, зависит лишь от интервала освоения $t_0 - t$. Обозначим через $\gamma K(t_0)$ объем инвестиций в момент времени t_0, а через $V(t)$ – число вакансий, созданных к моменту времени t. К моменту времени $t > t_0$ будет создано $g(t - t_0)\,\gamma K(t_0)$ вакансий. Интегрируя по всем $t_0 < t$, получим объем вакансий, образованный за счет инвестирования:

$$V(t) = \gamma\tau \int_{-\infty}^{t} K(t_0) e^{-\tau(t - t_0)} dt_0 \cdot$$

Дифференцируя это выражение по t, найдем, что $V(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dV(t)}{dt} = \tau\left(\gamma K(t) - V(t)\right) \cdot \tag{14}$$

Обозначим через $U(t)$ объем страховых взносов, поступающих в ПФ к моменту времени t, и пусть η – интенсивность потока поступлений. Повторяя вывод уравнения (14), придем к дифференциальному уравнению для функции $U(t)$

$$\frac{dU(t)}{dt} = \eta(aX(t) - U(t)) \cdot \tag{15}$$

Теперь динамика величины ПФ описывается, вместо уравнения (2), уравнением

$$\frac{dZ(t)}{dt} = (r(t) - \lambda(t))Z(t) + U(t) - bN(t) \cdot \tag{16}$$

Итак, версия модели динамики ПФ, учитывающая лаги, формализована в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1), (3), (4), (14) – (16).

Введем переменные $v(t) = V(t)/H(t)$ и $u(t) = U(t)/H(t)$. Требуется найти состояния равновесия и условия их асимптотической устойчивости для системы уравнений

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{dz(t)}{dt} = (r(t) - \lambda(t) - \mu)z(t) + u(t) - \beta b; \quad \dfrac{du(t)}{dt} = a\eta x(t) - (\eta + \mu)u(t); \\ \dfrac{dx(t)}{dt} = m(v(t), \alpha - x(t)) - (q + \mu)x(t); \quad \dfrac{dv(t)}{dt} = \gamma\tau k(t) - (\tau + \mu)v(t); \\ \dfrac{dk(t)}{dt} = sf(k(t), x(t)) - (\delta + \mu)k(t). \end{array}\right\} \tag{17}$$

Для положительной разрешимости системы должно быть $\eta + \mu > 0$ и $\tau + \mu > 0$. Очевидно, что и эти новые ограничения касаются лишь режима суженного воспроизводства.

Способ определения стационарных точек системы (17) по существу останется тем же, что использовался для системы (7). Найдем значение равновесной капиталовооруженности κ^*, выразим из правой части четвертого уравнения переменную v: $v = \gamma\tau k / (\tau + \mu)$, и подставим это выражение в правую часть третьего уравнения. Вместо (8) для определения x^* получим уравнение

$$m\left(\frac{\gamma\tau}{\tau+\mu}\kappa^*, \frac{\alpha}{x}-1\right)=\mu+q. \qquad (18)$$

Найдем из (18) x^* и вычислим $u^* = a\eta x / (\eta + \mu)$. Заменим *Условие 1* на *Условие 2*.

Условие 2. Будем полагать, что всегда удается выбрать значения параметров и такие значения равновесной величины поступлений страховых взносов u^*, что справедливо неравенство $u^* > \beta b$.

В итоге при помощи *Условия 2* и условия (9) вычислим равновесное значение величины ПФ: $z^* = (\beta b - u)/(r - \lambda - \mu) > 0$. В результате мы определили состояние равновесия (z^*, u^*, x^*, v^*, k^*) системы (17).

В *Приложении* показано, что, как и в базовой версии модели, условия существования положения равновесия обусловливают и его асимптотическую устойчивость. Таким образом, наличие временных лагов не мешает устойчивому функционированию пенсионной системы.

Напомним, что для исходной системы уравнений (1), (3), (4), (14) – (16) стационарная точка системы (17) определяет траекторию сбалансированного роста, на которой переменные $Z(t)$, $U(t)$, $X(t)$, $V(t)$, $K(t)$ меняются с одинаковым темпом прироста μ.

В заключение обсудим вопрос об устойчивости пенсионной системы в случае суженного воспроизводства населения. Именно такой тип воспроизводства населения отмечается в РФ в настоящее время. Для нашей модели суженное воспроизводство, как уже отмечалось, означает отрицательность темпа роста населения: $\mu < 0$. Выше мы видели, что для существования равновесных состояний коэффициенты системы дифференциальных уравнений должны удовлетворять системе неравенств $q + \mu > 0$, $\delta + \mu > 0$, $\eta + \mu > 0$, $\tau + \mu > 0$. Параметры q, δ, η, τ, задают интенсивность изменения экономической компоненты модели и, следовательно, неравенства показывают, что равновесные состояния возможны лишь тогда, когда экономическая среда меняется быстрее, чем развиваются негативные демографические тенденции. При этом устойчивость равновесий будет достигаться лишь за счет достаточно высоких темпов прироста заработной платы. Это обусловлено неравенством (9).

5. Приложение. Формулировка и анализ условий асимптотической устойчивости состояний равновесия

Как известно, исследование асимптотической устойчивости стационарных точек по первому приближению сводится к анализу собственных чисел матрицы Якоби G^* правой части исходной системы дифференциальных уравнений, вычисленной в стационарной точке (z^*, x^*, k^*). Для устойчивости стационарного состояния необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического полинома матрицы Якоби имели отрицательные вещественные части [1; 20; 28; 30]. В работе исследуются матрицы первого приближения вида

$$G^* = \begin{pmatrix} P_z^* & P_x^* & P_k^* \\ Q_z^* & Q_x^* & Q_k^* \\ 0 & R_x^* & R_k^* \end{pmatrix}. \qquad (\text{П}1)$$

Вычислим характеристический полином матрицы G^*, используя для сокращения записи обозначения элементов, принятые в теории матриц:

$$\det(G^* - \varsigma I) = (a_{11} - \varsigma)(\varsigma^2 - c\varsigma + d) - a_{21}[a_{12}(a_{33} - \varsigma) - a_{13}a_{32}], \qquad (\text{П}2)$$
$$c = a_{22} + a_{33}, \quad d = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}.$$

Замечание П1. Из формулы (П2) сразу следует, что, когда $a_{21} = Q_z^* = 0$, для асимптотической устойчивости состояния равновесия необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства: $a_{11} = P_z^* < 0$, $c < 0$, $d > 0$. Стационарная точка будет узлом, если дискриминант

$$\Delta = (a_{22} - a_{33})^2 + 4a_{23}a_{32} \geq 0.$$

В общем случае для проверки условий асимптотической устойчивости используем критерий Гурвица. Для этого приведем характеристический полином матрицы (П2) к виду

$$-(\varsigma^3 + a_1\varsigma^2 + a_2\varsigma + a_3). \qquad (\text{П}3)$$

Коэффициенты характеристического полинома выражаются через элементы матрицы следующим образом

$$a_1 = -(c + a_{11}), \quad a_2 = ca_{11} + d - a_{11}a_{21}, \quad a_3 = -da_{11} + a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}).$$

Критерий формулируется в виде системы неравенств [5; 30]:

$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 - a_3 > 0. \qquad (П4)$$

Последнее из этих неравенств удобно записать в следующем виде

$$a_1a_2 - a_3 = -c(d - a_1a_{11}) + a_{21}[a_{12}(a_{11} + a_{22}) + a_{13}a_{32}].$$

Вычислим значения элементов матрицы первого приближения в стационарной точке, используя для этого определяющие эту точку уравнения (7). Напомним, что во всех рассмотренных вариантах модели предполагается, что $ax^* > \beta b$ и $z^* > 0$, поэтому $a_{11} = P_z{}^* = (\beta b - ax^*) / z^* < 0$. Вычислим другие диагональные элементы

$$a_{22} = Q_x^* = -\left(m_y^* + \frac{m^*}{x^*}\right) < 0, \quad a_{33} = R_k^* = -s\frac{x^*}{k^*}f_x^* < 0.$$

Отсюда вытекает, что с < 0. Учитывая это обстоятельство, получим, что во всех рассмотренных выше вариантах модели выполнено первое неравенство критерия Гурвица: $a_1 = -(c + a_{11}) > 0$.

Для всех версий модели также остаются знакоопределенными элементы

$$a_{23} = Q_k^* = \gamma m_v > 0, \quad a_{32} = R_x^* = sf_x^* > 0.$$

В результате для всех вариантов модели и коэффициент $d > 0$. Действительно:

$$d = Q_x^* R_k^* - Q_k^* R_x^* = \alpha s\frac{f_x^* m_y^*}{k^*} > 0. \qquad (П5)$$

Из сказанного выше, с учетом *Замечания П1*, сразу получаем, что стационарное состояние основного варианта модели (с экзогенно заданными постоянными величинами r и λ) является асимптотически устойчивым узлом. Точно так же, и в варианте модели с эндогенными коэффициентами $r(k(t), x(t))$ и $\lambda(k(t), x(t))$, условия, обеспечивающие существование стационарное значение $z^* > 0$, гарантируют асимптотическую устойчивость стационарного состояния (поскольку и здесь $a_{21} = Q_z{}^* = 0$).

Проверим устойчивость стационарных состояний модели, в которой размер доли ЭАН в населении зависит от удельной величины ПФ $z(t)$, т.е. $\alpha = \alpha(z(t))$. В матрице первого приближения элемент $a_{21} \neq 0$ и в критерии (П4) надо проверять два последних неравенства. Имеем $a_{21} = Q_z{}^* = m_y(d\alpha(z)/dz) < 0$, поскольку по предположению $(d\alpha(z)/dz) < 0$, и $a_{12} = P_x{}^* = a > 0$. При помощи (П5) найдем, что

$$a_3 = -da_{11} + a_{12}a_{21}a_{33} > 0, \quad a_1a_2 - a_3 = -c(d - a_1a_{11}) + a_{12}a_{21}(a_{11} + a_{22}) > 0.$$

Таким образом, и в этой версии модели условия критерия Гурвица выполнены и стационарные состояния асимптотически устойчивы.

Обсудим теперь версию модели, в которой удельная величина ПФ $z(t)$ влияет на интенсивность роста уровня занятости населения. В матрице первого приближения, по сравнению с основным вариантом модели появится ненулевой элемент $a_{21} = Q_z{}^* = -\xi < 0$. Стационарное состояние модели асимптотически устойчиво. Проверка этого утверждения проводится совершенно так же, как и в предыдущей версии модели.

Обратимся к выяснению условий асимптотической устойчивости модели с временными лагами. Для этого удобно представить матрицу перового приближения $G1^*$ в виде блочной матрицы

$$G1^* = \begin{pmatrix} C^* & E^* \\ 0 & D^* \end{pmatrix}, \quad C^* = \begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad D^* = \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} & 0 \\ 0 & a_{44} & a_{45} \\ a_{53} & 0 & a_{55} \end{pmatrix}, \quad E^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{23} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для элементов матрицы $G1^*$ имеем следующие выражения

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} = \dfrac{\beta b - u^*}{r - \lambda - \mu}, \; a_{22} = -(\eta + \mu) < 0, \; a_{33} = -(m_y^* + \dfrac{m^*}{x^*}) < 0, \\ a_{44} = -(\tau + \mu) < 0, \, a_{55} = -(\delta + \mu)\dfrac{x^* f_x^*}{f^*} < 0, \, a_{23} = a\eta > 0, \\ a_{34} = m_v^* > 0, \; a_{45} = \gamma\tau > 0, \; a_{53} = (\delta + \mu)\dfrac{k^* f_x^*}{f^*} > 0. \end{array}\right\} (П6)$$

Детерминант матрицы $G1^* - \zeta\, \mathrm{I}$, как показывает теорема Лапласа, представляет собой произведение $\det(G1^* - \zeta\, \mathrm{I}) = \det(C^* - \zeta\, \mathrm{I}) * \det(D^* - \zeta\, \mathrm{I})$. Благодаря этому обстоятельству характеристический полином матрицы $G1^*$ представим в виде произведения полиномов (запишем $\det(D^* - \zeta\, \mathrm{I})$ в виде (П3))

$$\left.\begin{array}{l} \det(G1^* - \varsigma I) = -(a_{11} - \varsigma)(a_{22} - \varsigma)(\varsigma^3 + a_1\varsigma^2 + a_2\varsigma + a_3), \\ a_1 = -(a_{33} + a_{44} + a_{55}), \, a_2 = a_{33}(a_{44} + a_{55}) + a_{44}a_{55}, \\ a_3 = -(a_{33}a_{44}a_{55} + a_{34}a_{45}a_{53}). \end{array}\right\} (П7)$$

Из (П7) сразу вытекает, что два первых собственных числа матрицы первого приближения $G1^*$ равны $\zeta_1 = a_{11}$ и $\zeta_2 = a_{22} < 0$. С учетом *Условия 2* и (9) получаем, что и $\zeta_1 = a_{11} < 0$. Покажем, что и остальные собственные числа матрицы $G1^*$ имеют отрицательные вещественные части. Для этого проверим критерий Гурвица. Очевидно, что $a_1 > 0$. Последнее из неравенств в (П4) теперь выражается через элементы матрицы $G1^*$ следующим образом

$$a_1 a_2 - a_3 = -(a_{33} + a_{55})(a_{33}a_{55} - a_1 a_{44}) + a_{34}a_{45}a_{53}.$$

Используя эту формулу и (П6), нетрудно увидеть, что $a_1a_2 - a_3 > 0$. Осталось проверить неравенство $a_3 > 0$. В силу (П6) и (П7) имеем

$$a_3 = (\delta + \mu)\frac{f_x^*}{f^*}\left[(\tau + \mu)(x^* m_y^* + m^*) - \gamma\tau k^* m_v^*\right].$$

Преобразуем это выражение при помощи теоремы Эйлера и справедливого в стационарной точке равенства $(\tau + \mu)v^* = \gamma\tau k^*$. В результате придем к формуле, показывающей знак коэффициента a_3

$$a_3 = \alpha(\delta + \mu)(\tau + \mu)m_y^* \frac{f_x^*}{f^*} > 0\cdot$$

Как видим, критерий Гурвица выполнен и, следовательно, положение равновесия модели с временными лагами асимптотически устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка М.: Наука, 1966. 568 с.

2. *Ашманов С.А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984. 294 с.

3. *Берндт Р.Э.* Практика эконометрики: классика и современность. М.: ЮНИТИ-ДАНА. 2006. 847 с.

4. *Борисов К.Ю.* Агрегированные модели экономического роста. СПб.: СПбЭМИ РАН, 2005. 206 с.

5. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.

6. *Гурвич Е.Т.* Принципы новой пенсионной реформы // Вопросы экономики. 2011. № 4. С. 4–31.

7. *Гурвич Е.Т.* Приоритеты нового этапа пенсионной реформы // SPERO. 2008. № 8. С. 43–62.

8. *Гурвич Е.Т.* Реформа 2010 года: решены ли долгосрочные проблемы пенсионной системы? // Журнал Новой экономической ассоциации. 2010. № 6. С. 1–17.

9. *Гурвич Е., Сонина Ю.* Микроанализ российской пенсионной системы // Вопросы экономики 2012. № 2. С. 27–51.

10. *Дегтярь Л.С.* Пенсионные реформы в развитых странах: новейшие тенденции и выводы для России // Вопросы прогнозирования. 2012. № 2. С. 101–111.

11. *Дементьев А.В.* Вклад Даймонда, Мортенсена и Писсаридиса в экономическую науку // Экономический журнал ВШЭ. 2010. № 1. С. 50–67.

12. Динамическая теория биологических популяций / под ред. Р.А. Полуэктова. М.: Наука, 1974. 456 с.

13. *Ильин Е.М., Косолапенко Н.Г.* Моделирование влияния изменений параметров естественного воспроизводства и миграции на темп роста и возрастную структуру стабильного населения // Экономико-математические исследования: математические модели и информационные технологии. VII. СПб.: Нестор-История. 2012. С. 78–101.

14. *Ильин Е.М., Косолапенко Н.Г.* Моделирование уровня безработицы в экономике с поисковыми трениями и с переменной численностью экономически активного населения // Вестник образования и развития науки Российской академии естественных наук. 2019. № 1. С. 43–50.

15. *Ильин Е.М., Косолапенко Н.Г.* О моделировании демографических аспектов изменений величины пенсионного фонда // Вестник образования и развития науки Российской академии естественных наук. 2016. № 2. С. 42–49.

16. *Интрилигатор М.* Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975. 606 с.

17. *Кудрин А., Гурвич Е.* Старение населения и угроза бюджетного кризиса. Глобальные демографические тренды // Вопросы экономики. 2012. № 3. С. 52–79.

18. *Назаров В.* Будущее пенсионной системы: параметрические реформы или

смена парадигмы? // Вопросы экономики. 2012. № 9. С. 67–87.

19. *Никитин М., Юрко А.* Поисковые теории рынков // Вопросы экономики. 2011. № 1. С. 51–64.

20. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.–Л: Гостехиздат, 1949. 551 с.

21. *Писсаридес К.* Может ли жесткость заработных плат объяснить волатильность безработицы // Вопросы экономики. 2011. № 1. С. 65–88.

22. *Ромер Д.* Высшая макроэкономика. М.: Издат. дом ВШЭ, 2015. 855 с.

23. *Синявская О.В., Омельчук Т.Г.* Последствия демографического старения для пенсионной системы в среднесрочной перспективе: опыт прогнозирования для России // SPERO. 2014. № 19. С. 7–30.

24. *Синявская О.В.* Политика повышения пенсий последних лет: результаты и ограничения // SPERO. 2012. № 16. С. 39–57.

25. *Соловьев А.К.* Долгосрочное прогнозирование развития пенсионной системы России: факторы и условия // Проблемы прогнозирования. 2012. № 3. С. 86–102.

26. *Соловьев А.К.* Демографическая угроза экономике: макроанализ пенсионной системы России // Проблемы прогнозирования. 2013. № 2. С. 112–126.

27. *Староверов О.В.* О переходе на накопительную систему пенсионного обеспечения // Экономика и мат. методы. 2002. Т. 38. Вып. 2. С. 25–35.

28. *Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике М.–Ижевск: Институт Компьютерных исследований, 2003. 442 с.

29. *Щербакова Е.С.* Страны ЕС и ОЭСР существенно различаются по возрасту выхода на пенсию, ожидаемой продолжительности жизни на пенсии и риску бедности для пенсионеров // Демоскоп. Российский демографический барометр. 2010. 18–31 октября. № 439–440. URL: http://www.demoscope.ru/weekly/2010/0439/barom05.php (дата обращения: 05.09.2020).

30. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.

31. *Rogerson R., Shimer R., Wright R.* Search-Theoretic Models of the Labor Market: A Survey // Journal of Economic Literature. 2005. № 43. P. 959–988.

32. *Romer D.* Advanced Macroeconomics. The McGraw-Hill Seriesin Economics. Fourth Edition, 2010. 716 p.